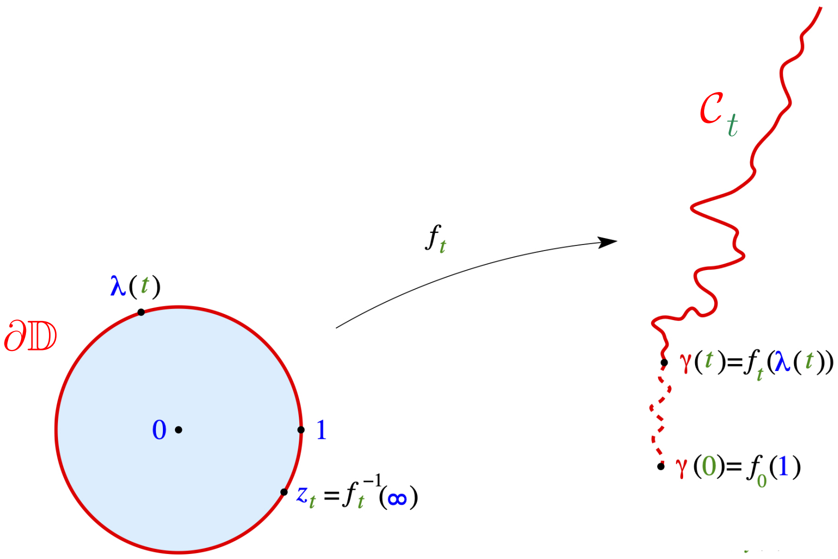
Des nouvelles multifractales du SLE

L'*évolution de Schramm-Loewner* (SLE en anglais) est un processus stochastique planaire, universel et paradigmatique, inventé par Oded SCHRAMM en 1999. Il conduisit à deux Médailles Fields, celle de Wendelin WERNER en 2006 pour la relation du SLE avec le mouvement brownien planaire, et celle de Stanislas SMIRNOV en 2010 pour sa relation avec la percolation et le modèle d'Ising critiques. Ce processus engendre des courbes fractales universelles, comme la courbe semi-infinie $\mathcal{C}_t$, en **rouge** sur la figure. Un mobile aléatoire $\lambda(t) = \exp[i(\sqrt{\kappa}B_t + at)]$ parcourt le bord $\partial\mathbb{D}$ du disque unité $\mathbb{D}$ selon un mouvement brownien B_t, avec constante de diffusion κ et constante de dérive a. Il engendre une transformation conforme aléatoire $f_t(z \in \mathbb{D})$, dépendante du temps t, qui coupe et replie $\partial\mathbb{D}$ sur une spirale logarithmique fractale $\mathcal{C}_t$, l'image du mobile étant la pointe $\gamma(t)$ (le "tip") du SLE. Avec le temps, le processus efface progressivement $\mathcal{C}_t$.



Bertrand DUPLANTIER de l'IPhT, en collaboration avec Michel ZINSMEISTER de l'Université d'Orléans, un jeune mathématicien chinois, Yong HAN, et une mathématicienne vietnamienne, Chi NGUYEN, ont récemment obtenu le **spectre multifractal généralisé** $\beta = \beta(p,q;\kappa,a)$, caractérisant le comportement hautement singulier près de la courbe fractale des moments, pour p,q complexes, de f_t et de sa dérivée $f_t' = \partial f_t/\partial z$, tels que

$$\int_{r\partial\mathbb{D}} \mathbb{E}\left[\frac{|f_t'(z)^p|}{|f_t(z)^q|}\right] |dz| \asymp (1-r)^{-\beta},\ r \to 1^-.$$

La méthode utilisée, dite de **Gravité quantique de Liouville**, consiste à arpenter le plan complexe avec une mesure quantique, où les contraintes géométriques s'estompent comme le Chat du Cheshire, puis à revenir dans le plan euclidien classique en utilisant la relation dite de **KPZ** (Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov), prouvée pour la première fois en 2011 par BD et Scott SHEFFIELD du MIT. La formule obtenue est parfaitement vérifiée sur des lieux d'intégrabilité bi-dimensionnels de $(p,q) \in \mathbb{C}^2$. Mais à ce jour, il n'existe pas de preuve purement mathématique de ce résultat exact !